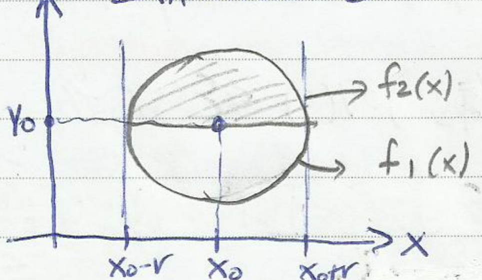
ΓΕΝΙΚΑ

Τρόπος λύσης του $M = P = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le r^2 \}$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le r^2 \Rightarrow (x-x_0)^2 \le r^2 \Rightarrow |x-x_0| \le r \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 - r \le x \le x_0 + r \Rightarrow B = [x_0 - r, x_0 + r] \subseteq \mathbb{R}^n$

Σχηματικά:




Και $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-y_0)^2 = r^2 - (x-x_0)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |y-y_0| = \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y - y_0 = \pm \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} = f_2(x)$

ή

$y = y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} = f_1(x)$

Τουτέστιν,

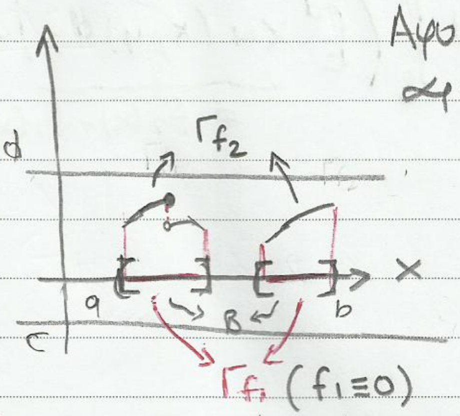
$$V(D) = \int_B (f_2(x) - f_1(x))\,dx =$$

$$= \int_{[x_0-r,\,x_0+r]} \left( y_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \right) dx - \int_{[x_0-r,\,x_0+r]} \left( y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \right) dx =$$

$$= 2\int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\,dx \ \underset{\text{μεταβλ}}{\overset{\text{αλλαγ.}}{=}} \ \dots = \pi r^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ( Βασικές Ιδέες)

για $n=1$ : και $B \subset \mathbb{R}$ , $M \subset \mathbb{R}^2$




Αφού, $B$ J-μετρ. $\Rightarrow$ $B$ φραγμένο

αφού $f_1, f_2$ πάνω από το $B$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f_1, f_2$ φραγμένες

και το $\Gamma_{f_1, f_2}$ θα έχει

2-διάστατο μηδεν. περιεχ.

Τώρα, $M \subset A$ κλειστό ορθογώνιο

$$V(M) = \int_M 1 = \int_A \chi_M \quad \text{όπου} \quad \chi_M(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in M \\ 0, & (x,y) \notin M \end{cases}$$

$$= \int_{[a,b]\times[c,d]} \chi_M(x,y)\, d(x,y) \,.$$

όμως, $\forall x \in B$ οι $\chi_M(x,\cdot) : [c,d] \to \mathbb{R}$ ολοκληρ.

αφού

$$\chi_M(x,y) = \begin{cases} 1, & y \in [f_1, f_2] \\ 0, & y \in [c, f_1] \cup (f_2, d] \end{cases}$$

$\downarrow$

Το οποίο φαίνεται και στο σχήμα μας.

Καθώς και $\int_c^d \mathcal{X}_M(x,y)\,dy = f_2(x) - f_1(x)$

Επίσης, $\forall x \in [a,b] \setminus B$

$\mathcal{X}_M(x,\cdot) : [c,d] \to \mathbb{R}$ με $\mathcal{X}_M(x,y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_c^d \mathcal{X}_M(x,y)\,dy = 0 \quad \forall x \in [a,b] \setminus B$

Άρα, η $\mathcal{X}_M(x,\cdot) : [c,d] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη $\forall x \in [a,b]$ (και η συνάρτηση $\mathcal{X}_M : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη) $\Rightarrow$

$$\xRightarrow{\text{fubini}} \int_{[a,b]\times[c,d]} \mathcal{X}_M(x,y)\,d(x,y) = \int_{[a,b]} \left( \int_c^d \mathcal{X}_M(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{[a,b]\setminus B} \Big( \underbrace{\int_c^d \mathcal{X}_M(x,y)\,dy}_{=0} \Big) dx + \int_B \Big( \int_c^d \underbrace{\mathcal{X}_M(x,y)\,dy}_{= f_2(x) - f_1(x)} \Big) dx$$